



Оцінювання глобальної дилатації Землі за GNSS-даними (на прикладі 2008-2014 рр.)

Олександр ТАДЄЄВ  <https://orcid.org/0000-0003-4566-0160>

УДК 528.2/.3:551.24

ПОШУКОВА СТАТТЯ

Національний університет водного господарства та природокористування,
кафедра геодезії та картографії

Листування – o.a.tadyeyev@nuwm.edu.ua

Ключові слова: кульові функції, метричний тензор, деформація, дилатація, GNSS

Анотація: у статті представлено результати науково-методичного дослідження проблеми оцінювання деформації Землі в частині статичного моделювання дилатації глобального (планетарного) масштабу.

Мета досліджень: апробація методу оцінювання тривимірних деформацій, розробленого на основі теорії перетворень образів ріманового простору в формі складних диффеоморфних многовидів, використовуючи ряди координат станцій глобальної GNSS-мережі IGS.

Результати досліджень. Апробацію методу виконано на емпіричній вибірці даних, яка сформована координатами 433 постійно діючих станцій класу точності А глобальної GNSS-мережі IGS протягом 2008–2014 рр. Граничні дати дослідного періоду прив'язано до верифікацій відповідних розв'язків ITRF референцної системи ITRS. Вибірку координат сформовано на основі бази даних JPL Comb архіву SOPAC, яка з точки зору цільового призначення рекомендується до використання для потреб геодинаміки.

Функціональну модель деформації представлено системою трьох емпіричних формул, які сформовано за результатами апроксимації рядів кульових функцій трьох змінних зі степенями почергово від першої до дев'ятої. Апроксимацію реалізовано на емпіричній вибірці даних методом найменших квадратів. Порівняння результатів оцінювання точності апроксимації показало великі, подекуди більші ніж вдвічі, значення похибок, які відповідають лінійній функції трьох змінних, порівняно з похибками апроксимації функцій зі степенями вищих порядків. Це стало підставою констатувати факт нелінійних тенденцій деформації Землі протягом дослідного періоду.

Емпіричні формули, побудовані за результатами апроксимації рядів усіх степенів, почергово використано для формування метричного тензора деформації з послідовним обчисленням його власних інваріантів і характеристики дилатації – відносного об'ємного розширення Землі. Подано аналіз одержаних результатів та порівняння з аналогами, визначеними іншими авторами. Серед іншого, зокрема, результати обчислення відносного об'ємного розширення за рядами усіх степенів узгоджуються з тенденцією відносного зменшення об'єму Землі, а результат його обчислення при першій степені рядів, що відповідає лінійній функції, у межах його точності співпадає з величиною масштабного фактора, що є його аналогом у лінеаризованій формі трансформації ITRF2014-ITRF2008. На основі функціональних моделей нелінійного типу виведено оптимальний кінцевий результат статичного моделювання дилатації Землі.

2026, 857; DOI: <https://doi.org/10.31861/geo.2026.857.166-175>

Open Access. © 2026 О. ТАДЄЄВ

опубліковано у Чернівецькому національному університеті

Ця робота ліцензується відповідно до

CC BY-NC-ND із Зазначенням Авторства – Некомерційна – Без Похідних 4.0 Міжнародна

<https://geochnu.top/>



Наукова новизна: посвідчено факт нелінійних тенденцій деформації Землі планетарного масштабу протягом 2008–2014 рр.; дилатацію Землі посвідчено показником відносного об'ємного розширення -32×10^{-9} .

1. ВСТУП

Оцінювання деформації Землі – одна з пріоритетних науково-прикладних проблем сучасної геодинаміки. Вирішення проблеми досягається міждисциплінарною співпрацею широкого кола наук про Землю. Посеред них особливе місце посідає геодезична галузь знань як така, що спроможна кількісно оцінити перебіг деформаційних процесів. Значущість геодезичних методів дослідження проблеми суттєво підвищилась завдяки запровадженню у виробництво новітніх технологій, які ґрунтуються на використанні глобальних навігаційних супутникових систем *GNSS (Global Navigation Satellite System)*. Дані безперервного моніторингу положення *GNSS*-станцій розкрили нові перспективи статичного та кінематичного моделювання полів деформації Землі усіх масштабів – від локального аж до глобального рівнів. Напрями та зміст досліджень проблеми геодезичними методами визначають резолюції Міжнародної асоціації геодезії *IAG (International Association of Geodesy)* у частині діяльності комісії 3 «Обертання Землі та геодинаміка» ([Джерело](#)).

2. МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ

Вирішення проблеми за геодезичними даними здебільшого досягається методом скінченних елементів. Метод ґрунтується на класичній теорії деформації суцільного середовища, як це подано, наприклад, у працях ([Altiner 1999](#); [Hartmann, Katz 2007](#)). Його було запроваджено у практику деформаційного аналізу для потреб геодинаміки ще на початку минулого століття завдяки напрацюванням японських вчених [Terada, Miyabe \(1929\)](#). В якості моделі скінченного елемента вони використали двовимірний симплекс – трикутник, як основний геометричний елемент побудови мереж триангуляції. Еволюцію методу в частині вирішення поставленої проблеми вдало розкрив професор [Dermanis \(2009\)](#). У різних видозмінах метод і дотепер використовують у дослідницькій практиці. Більшість досліджень спрямовані на вивчення горизонтальної складової деформації, що стало надбанням використання результатів повторного визначення координат в класичних планових геодезичних мережах. Якщо вдавалось сумістити пункти планових мереж з висотними і визначити таким чином просторові координати вершин скінченних елементів, то це забезпечувало відповідне просторове (тривимірне) моделювання деформації. Наприклад, як це реалізували [Kiamehr, Sjoberg \(2005\)](#) у рамках привимірного симплекса – тетраедра. Схожий результат авторства [Іщенко \(2018\)](#), [Pietrantonio, Riguzzi \(2004\)](#) або [Grafarend, Voosoghi \(2003\)](#) було досягнуто також за *GNSS*-даними. Подібного роду досліджень різного авторства чи географічної прив'язки незчисленна кількість. Так чи інакше, але дослідники використовують метод скінченних елементів у поєднанні з лінійною моделлю математичної теорії пружності. Будучи найпростішим доступним засобом моделювання, лінійна модель такої потужної теоретичної основи часто зумовлює низьку достовірність обчислюваних оцінок деформаційних процесів в умовах земної кори, адже їх перебіг не завжди відбувається згідно закономірностей лінійного характеру. За граничних умов це може спричинити хибну інтерпретацію деформації. Такий висновок обґрунтовано емпіричними дослідженнями, результати яких представлено у статті ([Тадєєва та ін. 2012](#)). Деякі оптимізаційні рішення і перспективи вирішення проблеми методом скінченних елементів, у тому числі з можливістю вираження нелінійних закономірностей деформації, запропоновано у праці ([Тадєєв 2015](#)).

Беручи до уваги перспективи вирішення проблеми з використанням даних *GNSS*-моніторингу Землі у референційній системі *ITRS (International Terrestrial Reference System)*, можна виокремити чи не найбільшу ваду методу скінченних елементів і використовуваної

О. Тадєєв

Оцінювання глобальної дилатації Землі за *GNSS*-даними (на прикладі 2008-2014 рр.)

теоретичної основи з погляду на масштаби досліджуваних територій – це неспроможність оцінювати деформації Землі глобального (планетарного) масштабу. Такий факт звужує потенційні можливості методу. Саме це стало поштовхом для переосмислення традиційного підходу до вирішення проблеми і зумовило вироблення альтернативних рішень.

В зв'язку з потребою створення тривимірних моделей деформації, адекватних системі *ITRS*, запропоновано вирішення проблеми з позицій теорії перетворень образів ріманового простору в формі складних диффеоморфних многовидів. Диффеоморфними називають пару неізотропних многовидів, які мають однакову розмірність і зазнають гомеоморфного (однозначного, неперервного і диференційованого) перетворення. Складним диффеоморфним многовидом обрано евклідовий простір E_3 , дотичний до кожної точки ріманового простору у формі локальних тривимірних ортонормованих координатних базисів, які реалізовані у декартовій системі. За своєю сутністю, саме такі властивості має система координат, котра закладена в ідею створення *ITRS* і в якій реалізовується моніторинг Землі *GNSS*-методом. Якщо допустити, що перетворення простору мають геофізичне походження, то вони ототожнюються з деформацією Землі як області простору. За такої гіпотези, використовуючи методи проєктивно-диференціальної (метричної) геометрії, прийоми описування змін ріманової метрики у дотичному просторі, тривимірний метричний тензор простору, як головний носій інформації про зміну метрики простору, і різні міри перетворення, як це подано, наприклад, у праці ([Sokolnikoff 1964](#)), розкриваються перспективи описування деформації різними за геометричним змістом числовими характеристиками. Використана теоретична основа не накладає ніяких обмежень на геометричну форму, розміри чи масштаби досліджуваних областей простору. Важливо, разом з тим, що за такого теоретичного підходу не обмежується вибір аналітичних форм модельних базисних функцій, які генерують метричний тензор. На них лише накладають вже названі вище умови гомеоморфізму – однозначність, неперервність та диференційованість. Ця властивість розкриває перспективу побудови функціональних моделей деформації будьякої гомеоморфної аналітичної структури. Практично це можуть бути будьякі гладкі чи кусково-гладкі функції, у тому числі й лінійні. Повне обґрунтування використаного теоретичного підходу, результати розв'язків, робочі розрахункові формули та алгоритми розроблених на такій основі методів обчислення характеристик деформації розкрито у працях ([Тадєєв 2017](#); [Тадєєв 2023](#)). Беручи до уваги усталену практику деформаційного аналізу, характеристики деформації розділено на три групи: 1) головні лінійні деформації, які є показниками зміни форми в довільно заданому напрямі; 2) показники кутових спотворень та обертання; 3) дилатація – показник зміни об'єму Землі в цілому чи площі частини її поверхні безвідносно до масштабу.

3. ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ

Метою даної роботи є представлення результатів апробації та потенційних можливостей розробленого методу оцінювання тривимірних деформацій в частині визначення дилатації Землі глобального (планетарного) масштабу, використовуючи ряди координат станцій глобальної *GNSS*-мережі *IGS* ([Джерело](#))

4. РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

З метою вирішення поставленого завдання сформовано емпіричну вибірку даних. Ними стали прямокутні просторові координати x, y, z 433 постійно діючих станцій класу точності А глобальної *GNSS*-мережі *IGS*. Вибірку станцій здійснено з офіційного порталу *IGS* ([Джерело](#)). Координати станцій визначені шляхом опрацювання первинних результатів спостережень методом *GNSS* з використанням програмного пакету *QOCA* (*Quasi-Observation Combination*)

О. Тадєєв

Оцінювання глобальної дилатації Землі за *GNSS*-даними (на прикладі 2008-2014 рр.)

Analysis) і поміщені до бази *JPL Comb* архіву *SOPAC (Scripps Orbit and Permanent Array Center)* ([Джерело](#)). Пакет *QOCA* створювався на основі методики [Dong et al. \(1998\)](#), яка у ході опрацювання первинних даних на стадії виділення сигналу (тренду) передбачає видалення усіх ефектів крім тих, що мають геофізичне походження і так чи інакше пов'язані з геодинамікою. Як наслідок, з точки зору цільового призначення координати GNSS-станцій бази *JPL Comb* рекомендується використовувати для потреб геодинаміки ([Джерело](#)). Вибір бази даних *JPL Comb* для вирішення завдань геодинаміки підтвердили власними емпіричними дослідженнями [Savchuk et al. \(2017\)](#). Дослідний період визначено тривалістю в 6 років протягом 2008–2014 рр. Граничні дати прив'язано до верифікацій відповідних розв'язків *ITRF (International Terrestrial Reference Frame)* референцної системи *ITRS*. За значеннями координат станом на граничні дати обчислено складові $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ просторових зміщень станцій. Сформовану емпіричну вибірку даних використано для статичного моделювання деформації Землі протягом 2008–2014 рр.

Початковий етап моделювання – побудова функціональної моделі деформації Землі. В основу базисних функцій моделі закладено властивості загальних гармонічних поліномів степені n вигляду

$$u_n(x, y, z) = \sum_{p+q+r=n} a_{pqr} x^p y^q z^r. \quad (1)$$

На основі загального формулювання (1) утворено незалежні однорідні гармонічні поліноми степені n від трьох незалежних змінних x, y, z . Для цього використано метод невизначених коефіцієнтів, беручи до уваги, що незалежними будуть коефіцієнти з індексами $p+q=n$ і $p+q+1=n$. Тоді кожний окремий поліном включатиме $2n+1$ лінійно-незалежних коефіцієнтів. Сформовані на таких умовах поліноми називають кульовими функціями. Якщо загальний поліном u утворюється як сума незалежних однорідних поліномів $u_0 + u_1 + \dots + u_n$, де кожна складова u_i має степінь i , то u – це ряд гармонічних поліномів, який називають ряд кульових функцій. Найпростішою формою ряду $u_0 + u_1$, що відповідає степені $n=1$, є лінійна функція трьох змінних з чотирма невідомими коефіцієнтами.

Результатами розкладу поліному (1) на розкритих умовах утворення невідомих коефіцієнтів сформовано систему трьох осцилюючих функцій u, v, w , кожна з яких відповідає одній зі складових $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ просторових зміщень станцій у системі x, y, z . З метою визначення невідомих коефіцієнтів, функції підлягають апроксимації на сформованій на початковому етапі емпіричній вибірці даних. Якщо підвищувати порядок степені n таких функцій, то можна досягнути відповідне підвищення детальності покриття емпіричних даних. Апроксимацію реалізовано методом найменших квадратів. За її результатами визначено невідомі коефіцієнти системи трьох функцій u, v, w різних степенів n від першої до дев'ятої і побудовано відповідні емпіричні формули. Емпіричними формулами, що відповідають різним степеням рядів кульових функцій, сформовано функціональні моделі деформації Землі протягом 2008–2014 рр. Метод найменших квадратів забезпечив оцінювання точності визначених коефіцієнтів, утворених емпіричних формул, а також обчислення середніх квадратичних похибок $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ апроксимації рядів кульових функцій на складових зміщень $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Результати представлено в [таблиці 1](#) та на [рис. 1](#).

Порівняння результатів оцінювання точності апроксимації показує великі значення похибок при степені $n=1$, яка відповідає лінійній функції трьох змінних, порівняно з похибками апроксимації функцій зі степенями вищих порядків. Найбільшою мірою такі відмінності проявляються в похибках апроксимації σ_y та σ_z , де значення похибок

О. Тадєєв

Оцінювання глобальної дилатації Землі за GNSS-даними (на прикладі 2008-2014 рр.)

апроксимації лінійної функції більше ніж вдвічі перевищують похибки апроксимації функцій зі степенями вищих порядків. Це стало підставою констатувати факт нелінійних тенденцій деформації Землі протягом дослідного періоду. В зв'язку з цим, очевидний інтерес складає подальше формування функціональної моделі саме нелінійного типу та її використання для кількісного вираження деформації. Загалом, ефективність використання нелінійних функціональних моделей у дослідженнях фізичних полів Землі на сьогоднішній день стає фактом безсумнівним. Один з численних прикладів – їх використання для досягнення розв'язку реалізації системи *ITRS* версії *ITRF2014*: «генералізація розв'язку *ITRF2014* з розширеним моделюванням нелінійних рухів станцій (ред.: тільки в частині моделювання сезонних сигналів і постсейсмічних деформацій) забезпечила значне підвищення його точності порівняно з *ITRF2008*» (Altamini et al. 2016).

Точність апроксимації при степенях від п'ятої і вище практично стабілізується. Отже, оптимальними емпіричними формулами, які спроможні генерувати функціональну модель, можна прийняти такі, що відповідають рядам кульових функцій зі степенями порядку від п'ятої і вище. Разом з тим, емпіричні розрахунки показали, що підвищувати порядок степеня рядів вище дев'ятої недоцільно, позаяк це зумовлює відповідне збільшення похибок апроксимації. Такий результат очікуваний – він є наслідком зменшення числа ступенів свободи $m - k$ з причини збільшення кількості невідомих коефіцієнтів ряду k за умови сталої кількості GNSS-станцій $m = 433$, які залучено до емпіричної вибірки даних.

Таблиця 1. Середні квадратичні похибки апроксимації рядів кульових функцій

Похибки апроксимації на складових просторових зміщеннях станцій	Степень ряду n								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Кількість невідомих коефіцієнтів ряду k								
	4	9	16	25	36	49	64	81	100
σ_x (мм)	59	55	51	41	36	33	31	28	27
σ_y (мм)	140	93	88	83	75	68	63	61	59
σ_z (мм)	34	26	23	20	17	16	15	13	13

Наступний крок опрацювання емпіричної вибірки даних – обчислення показників дилатації Землі. З цією метою використано розрахункові формули для характеристики відносного об'ємного розширення $\theta_{відн}$ наступного вигляду (Тадєєв 2017; Тадєєв 2023):

$$\theta_{відн}^2 = I_1 - I_2 + I_3 - 1. \quad (2)$$

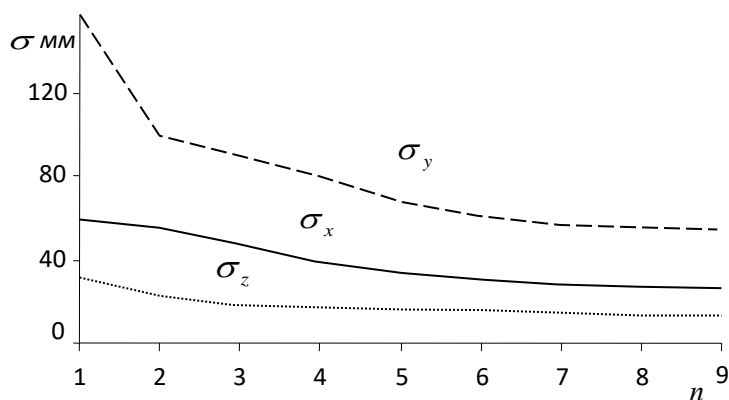


Рис. 1. Закономірності зміни похибок апроксимації від степеня рядів кульових функцій

Відносне об'ємне розширення $\theta_{\text{відн}}$ визначають три інваріанти I_1, I_2, I_3 метричного двохвалентного тензора перетворення (деформації) простору

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Інваріант $I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ враховує центроафінні перетворення координат, так само, як це інтерпретується з позицій лінійної тривимірної моделі математичної теорії пружності. Тільки цей інваріант традиційно використовується в задачах оцінювання дилатації на цій теоретичній основі. $I_2 = e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33} - e_{12}^2 - e_{13}^2 - e_{23}^2$. Останній інваріант $I_3 = e_{11}e_{22}e_{33} + 2e_{12}e_{13}e_{23} - e_{11}e_{23}^2 - e_{22}e_{13}^2 - e_{33}e_{12}^2$ - це характеристика абсолютного об'ємного розширення. Метричні коефіцієнти e_{ij} , якими формується тензор (3) і виражаються інваріанти I_1, I_2, I_3 , розкривають наступні комбінації частинних похідних функцій u, v, w функціональної моделі деформації:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \\ e_{22} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \\ e_{33} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2; \\ e_{12} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ e_{23} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}; \\ e_{13} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Характеристику відносного об'ємного розширення $\theta_{\text{відн}}$, як її розкривають визначення (2), (3), (4), обчислено на основі емпіричних формул, побудованих за результатами апроксимації рядів кульових функцій усіх степенів – від першої до девятої. Результати поміщено до *таблиці 2*.

Таблиця 2. Результати обчислення відносного об'ємного розширення Землі протягом 2008–2014 рр.

Степень ряду n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\theta_{\text{відн}} (x10^{-9})$	-1 ±16	-18 ±14	-22 ±11	-30 ±10	-33 ±9	-31 ±9	-33 ±11	-32 ±13	-38 ±21
Остаточне значення $\theta_{\text{відн}} (x10^{-9})$	-32								

Показники дилатації, отримані на основі рядів кульових функцій усіх степенів загалом узгоджуються з тенденцією відносного зменшення об'єму Землі, яка вперше виявлена у трансформації *ITRF2014-ITRF2008* і виражена аналогом відносного об'ємного розширення Землі $\theta_{\text{відн}}$ – масштабним фактором $D = (-0.02 \pm 0.02) \times 10^{-9}$ (Altamini et al. 2016). Таку тенденцію підтверджено також даними *ITRS*-центру Міжнародної Служби Обертання Землі *IERS (International Earths Rotation Service)*. За даними офіційного порталу *ITRS*-центру *IERS (Джерело)*, у попередніх трансформаціях системи *ITRS* фіксувались показники відносного збільшення об'єму Землі.

Результат обчислення відносного об'ємного розширення $\theta_{\text{відн}} = (-1 \pm 16) \times 10^{-9}$ при степені рядів $n = 1$, що відповідає лінійній функції, у межах його точності практично співпадає з величиною масштабного фактора $D = (-0.02 \pm 0.02) \times 10^{-9}$ у трансформації *ITRF2014-ITRF2008* (Altamini et al. 2016). Важлива ремарка: визначення величини D у трансформаціях референцної системи *ITRS* ґрунтується на використанні лінеаризованої форми чотирнадцяти параметричного перетворення Гельмерта, як це розкрито, наприклад, у працях (Марченко та ін. 2018; Moritz, Muller 1987) чи нормативних документах (Petit, Luzum 2010). Отже, в основу обох порівнюваних результатів закладено функціональні моделі лінійного типу. Порівняння обчисленого відносного об'ємного розширення $\theta_{\text{відн}}$ з величиною масштабного фактора D навряд чи могло б задовольнити очікувані сподівання з точки зору їх абсолютної збіжності. Адже для визначення кінцевих результатів використовувались вхідні дані різного походження, а також різні методи їх опрацювання.

Порівняння значень відносного об'ємного розширення, визначених з використанням рядів кульових функцій зі степенями 5÷8, показує їх практичну сталість у межах точності обчислень. За цими показниками обчислено остаточне значення $\theta_{\text{відн}} = -32 \times 10^{-9}$ – його виведено як середнє вагове із результатів, що відповідають рядам зі степенями 5÷8.

5. ВИСНОВКИ

1. Результати апроксимації рядів кульових функцій посвідчили нелінійні тенденції деформації Землі протягом 2008–2014 рр.

2. Показники відносного об'ємного розширення, одержані при усіх степенях рядів кульових функцій, узгоджуються з тенденцією відносного зменшення об'єму Землі, виражену масштабним фактором у трансформації *ITRF2014-ITRF2008*.

3. Результат обчислення відносного об'ємного розширення за рядами кульових функцій першої степені у межах його точності практично співпадає з величиною масштабного

О. Тадєєв

Оцінювання глобальної дилатації Землі за GNSS-даними (на прикладі 2008-2014 рр.)

фактора у трансформації *ITRF2014-ITRF2008*. Обидва порівнювані показники є наслідками використання функціональних моделей лінійного типу.

4. За даних умов експерименту остаточне обчислене значення характеристики відносного об'ємного розширення $\theta_{\text{відн}} = -32 \times 10^{-9}$ слід визнати найбільш оптимальним результатом статичного моделювання дилатації Землі планетарного масштабу протягом 2008–2014 рр.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Ищенко, М.** (2018). Дослідження деформацій земної кори на території України за допомогою GNSS спостережень. *Штучні супутники*, 53(3), 117-126. [Ishchenko, M. (2018) Doslidzhennia deformatsii zemnoi kory na terytorii Ukrainy za dopomohoiu GNSS sposterezhen. *Shtuchni suputnyky*, 53(3), 117-126.] <https://doi:10.2478/arsa-2018-0009>
2. **Марченко, О.М., Третяк, К.Р., Ярема, Н.П.** (2018). *Референтні системи в геодезії*. Львів: Львівська політехніка. [Marchenko, O.M., Tretiak, K.R., Yarema, N.P. (2018). *Referentsni systemy v heodezii*. Lviv: Lvivska politekhnika.]
3. **Тадєєва, О.О., Тадєєв, О.А., Черняга, П.Г.** (2012). Достовірність результатів опрацювання геодезичних даних методом скінченних елементів. *Геодинаміка*, 2(13), 28–33. [Tadieieva, O.O., Tadieiev, O.A., Cherniaha, P.H. (2012). Dostovirnist rezultativ opratsiuvannia heodezychnykh danykh metodom skinchennykh elementiv. *Neodynamika*, 2(13), 28–33.] <https://doi.org/10.23939/jgd2012.02.028>
4. **Тадєєв, О.** (2017). Оцінювання тривимірних деформаційних полів Землі методами проективно-диференціальної геометрії. Дилатаційні поля Землі. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, 1(33), 53-60. [Tadieiev, O. (2017). Otsiniuvannia tryvymirnykh deformatsiinykh poliv Zemli metodamy proektyvno-dyferentsialnoi heometrii. Dylatatsiini polia Zemli. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva*, 1(33), 53-60.]
5. **Тадєєв, О.** (2023). Перспективи оцінювання тривимірних деформацій Землі за даними глобальних навігаційних супутникових систем. *Технічні науки та технології*, 4(34), 265–276. [Tadieiev, O. (2023). Perspektyvy otsiniuvannia tryvymirnykh deformatsii Zemli za danymy hlobalnykh navihatsiinykh suputnykovykh system. *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii*, 4(34), 265–276.] [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2023-4\(34\)-265-276](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2023-4(34)-265-276)
6. **Тадєєв, О.** (2015). Проблеми та перспективи оцінювання деформаційних полів Землі за геодезичними даними. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*, 82, 73-94. [Tadieiev, O. (2015). Problemy ta perspektyvy otsiniuvannia deformatsiinykh poliv Zemli za heodezychnymy danymy. *Heodeziia, kartohrafiia i aerofotoznimannia*, 82, 73-94.] <https://doi.org/10.23939/istcgcap2015.02.073>
7. **Altamini, Z., Rebischung, P., Metivier, L., Collilieux, X.** (2016). ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121(B8), 6109-6131. <https://doi.10.1002/2016JB013098>
8. **Altiner, Y.** (1999). *Analytical surface deformation theory for detection of the Earths crust movements*. Berlin: Springer.
9. **Dermanis, A.** (2009). The evolution of geodetic methods for the determination of strain parameters for earth crust deformation. In Arabelos, D., Kontadakis, M., Kaltsikis, Ch., Spatalas, S. (Eds.), *Terrestrial and stellar environment*. Publication of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 107-144.
10. **Dong, D., Herring, T.A., King, R.W.** (1998). Estimating regional deformation from a combination of space and terrestrial geodetic data. *Journal of Geodesy*, 72(4), 200-214.
11. **Grafarend, E.W., Voosoghi, B.** (2003). Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets). *Journal of Geodesy*, 77, 303–326. <https://doi: 10.1007/s00190-003-0329-2>
12. **Hartmann, F., Katz, C.** (2007). *Structural analysis with finite elements*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
13. **Kiamehr, R., Sjöberg, L.E.** (2005). Analysis of surface deformation patterns using 3D finite element method: A case study in the Skane area, Sweden. *Journal of Geodynamics*, 39(4), 403–412. <https://doi.org/10.1016/j.jog.2005.03.001>
14. **Moritz, H., Muller, I.I.** (1987). *Earth's Rotation. Theory and estimations*. New York: Ungar.

О. Тадєєв

Оцінювання глобальної дилатації Землі за GNSS-даними (на прикладі 2008-2014 рр.)

15. **Petit, G., Luzum, B.** (2010). *IERS Conventions 2010. IERS Technical Note; 36*. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts fur Kartographie und Geodasie. http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechNote36/tn36_031.pdf
16. **Pietrantonio, G., Riguzzi, F.** (2004). Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications. *Journal of Geodynamics*, 38(1), 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.jog.2004.02.021>
17. **Savchuk, S., Tadyeyev, A., Prokopchuk, A.** (2017). Analysis and research results of GNSS data representativeness in estimation of modern horizontal motion of the earth's surface (on the example of Europe's territory). *Geodesy, cartography and aerial photography*. 86. 19-34. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.02.019>
18. **Sokolnikoff, I.S.** (1964). *Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua*. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons.
19. **Terada, T., Miyabe, N.** (1929). Deformation of the earth crust in Kwansai districts and its relation to the orographic feature. *Bulletin of Earthquake Research Institute, Univ. Tokyo*, 7, 223-239.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

20. International Association of Geodesy (2024). [\(Джерело\)](#)
21. International GNSS Service (2024). [\(Джерело\)](#)
22. ITRS Center IERS (2025). [\(Джерело\)](#)
23. Quasi-Observation Combination Analysis (2024). [\(Джерело\)](#)
24. Scripps Orbit and Permanent Array Center (2024). [\(Джерело\)](#)

Oleksandr Tadyeyev

National University of Water Management and Environmental Management
**Evaluation the global dilatation of the Earth using GNSS data
 (example 2008-2014)**

Keywords: spherical functions, metric tensor, deformation, dilatation, GNSS

Abstract: the article presents the results of a scientific and methodological study of the problem of evaluation the Earth's deformation in terms of static modeling of dilatation on a global (planetary) scale.

The purpose of the study: testing of the method for evaluation of three-dimensional deformations, developed on the basis of the theory of transformations of Riemannian space images, using the coordinates of the stations of the global *IGS GNSS* network.

Research result. The method was tested on an empirical data sample formed by the coordinates of 433 permanently operating stations of the class A accuracy of the global *IGS GNSS* network during 2008–2014. The cut-off dates of the research period is tied to verifications of the corresponding *ITRF* solutions of the *ITRS* reference system. The coordinate sample was formed based on the *JPL Comb* database of the *SOPAC* archive, which, from the point of view of its intended purpose, is recommended for use for geodynamics needs.

The functional model of deformation is represented by the system of three empirical formulas, which are formed based on the results of approximation of series of spherical functions from three variables with powers alternately from the first to the ninth. The approximation was implemented on an empirical data sample using the least squares method. Comparison of results of evaluation the approximation accuracy showed large, sometimes more than twice as many, values of errors corresponding to a linear function of three variables compared to the approximation errors of functions with higher order powers. This became the basis for stating the fact of nonlinear trends in the Earth's deformation during the research period.

Empirical formulas, which are constructed based on the results of approximation of series of all powers, are alternately used to form of the metric deformation tensor with the subsequent calculation of its own invariants and the dilatation characteristic -

О. Тадєєв

Оцінювання глобальної дилатації Землі за GNSS-даними (на прикладі 2008-2014 рр.)

the relative volumetric expansion of the Earth. An analysis of the obtained results and the comparison with analogues determined by other authors are presented. Among other things, in particular, the results of calculation the relative volumetric expansion using series of all powers are consistent with the trend of relative reduction of the Earth's volume. Also, the result of its calculation based on the first-degree series, which corresponds to a linear function, within its accuracy coincides with the value of the scale factor, which is its analogue in the linearized form of the *ITRF2014-ITRF2008* transformation. Based on nonlinear functional models, the optimal final result of the static modeling of the Earth's dilatation is derived.

Scientific novelty: the fact of nonlinear trends in the deformation of the Earth on a planetary scale during 2008–2014, and the dilatation of the Earth by the value of the relative volumetric expansion of -32×10^{-9} was confirmed.

Дата першого надходження статті до видання: 15.03.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 20.04.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 25.05.2026